MATEMATIKA 1 – 2. KOLOKVIJ – 2. DIO – OGLEDNI PRIMJERAK

1. (i) $f(x) = -3x+5$. Pokazujemo najprije injektivnost:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \quad -3x_1 + \cancel{5} = -3x_2 + \cancel{5}$$
$$-3x_1 = -3x_2 \quad /:(-3)$$
$$x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ je injekcija

Surjektivnost: $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$

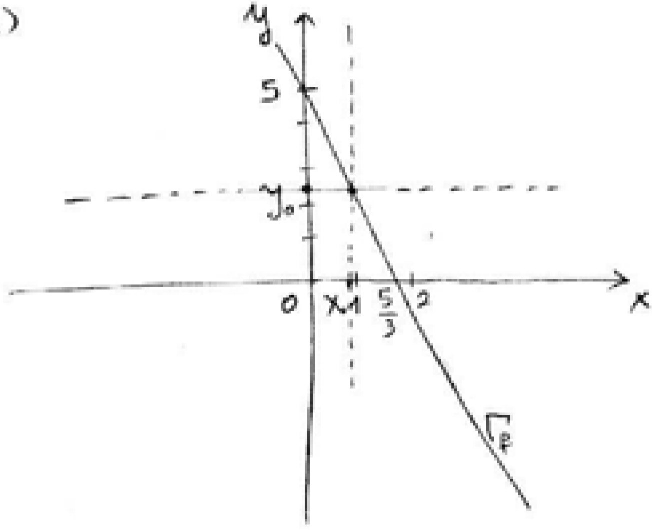
Uzmimo $y_0 \in \mathbb{R}$ i tražimo x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$, tj.
$$-3x_0 + 5 = y_0$$

Očito mora biti $-3x_0 = y_0 - 5 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{3}y_0 + \frac{5}{3}$ – to je traženi $x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ je surjekcija

Vrijedi injektivnost i surjektivnost $\Rightarrow f$ je bijekcija

(ii)



Sa slike vidimo sljedeće: za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postojat će jedinstveni $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, a upravo to dokazuje da je f bijekcija

(iii) $f(x) = -3x+5 \Rightarrow \quad x = -3f^{-1}(x) + 5$
$$3f^{-1}(x) = -x+5$$
$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$$

$$-3x+5 = 8 \quad / f^{-1}$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(8)$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1}{3}\cdot 8 + \frac{5}{3}$$
$$\boxed{x = -1}$$

(i) $f(x)=2x^2-1$

$f(x_1)=f(x_2)$

$2x_1^2-\cancel{1}=2x_2^2-\cancel{1} \quad /:2$

$x_1^2=x_2^2$

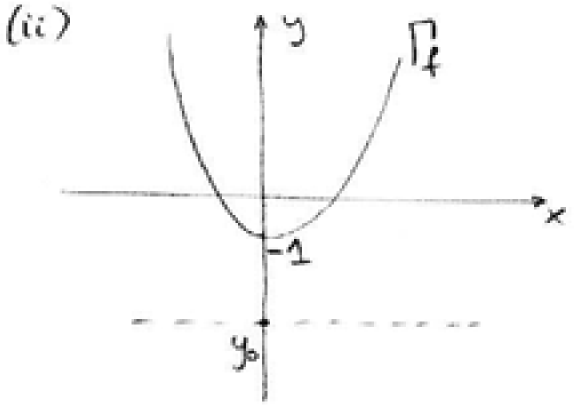
$x_1^2-x_2^2=0$

$(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)=0 \Rightarrow$ postoje 2 mogućnosti: $x_1-x_2=0$ ili $x_1+x_2=0$

tj. $x_1=x_2$ tj. $x_1=-x_2$

Vidimo da iz $f(x_1)=f(x_2)$ ne slijedi nužno da je $x_1=x_2$, pa f nije injekcija.

(ii)



Vidimo da za sve $y_0<-1$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da $f(x_0)=y_0$ (jer pravac kroz y_0 paralelan s x-osi nigdje ne siječe Γ_f).

$\Rightarrow$ f nije surjekcija

(iii) Očito treba uzeti da se u kodomeni nalaze samo oni y veći ili jednaki y-koordinati tjemena, tj. $y \geq -1$

$\Rightarrow$ f je surjekcija ako definiramo da je kodomena $[-1,\infty\rangle$.

(i) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$(0,4) \Rightarrow \quad 4 = c$

$(1,0) \Rightarrow \quad 0 = a+b+c \quad \Rightarrow \quad a+b = -4$

$(2,-2) \Rightarrow \quad -2 = 4a+2b+c \quad \Rightarrow \quad 4a+2b = -6 \,/:2$

$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} a+b = -4 \\ 2a+b = -3 \end{array} \Big/ - \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -5,\ c = 4$

$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = x^2 - 5x + 4}$

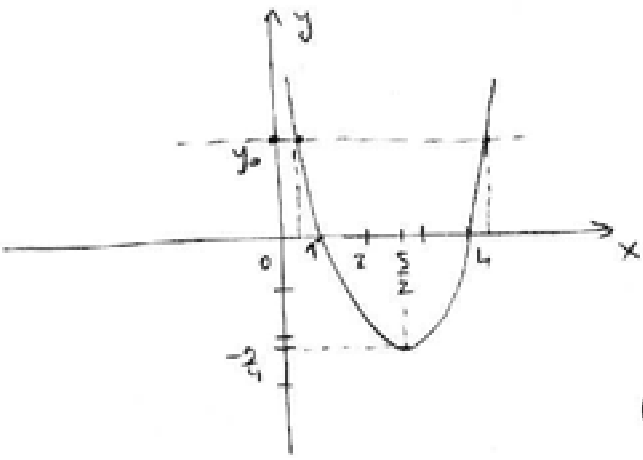
(ii) Skicirajmo graf funkcije - $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ je točka tjemena:

$\frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$\Rightarrow \frac{-D}{4a} = \frac{-9}{4}$

$\Rightarrow T\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$ kvalitativno graf izgleda ovako:



Vidimo da će za sve $y_0 \geq -\frac{9}{4}$ uvijek postojati dva x_0 takva da je $f(x_0) = y_0$ – očito možemo uzeti da je $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, \frac{5}{2}]$ ili $\mathcal{D}(f) = [\frac{5}{2}, \infty\rangle$

(uzimamo samo jedan krak parabole)

(iii) $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0 \qquad (16^x = (4^2)^x = (4^x)^2)$

Supst. $4^x = t$

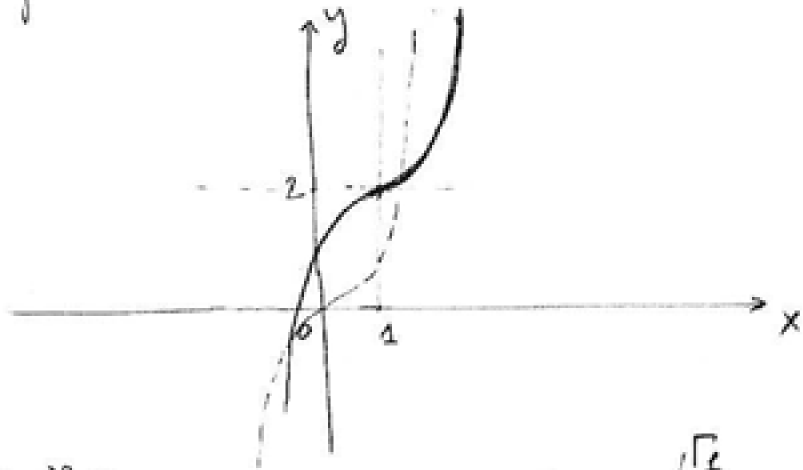
$\Rightarrow \quad t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \quad t_1 = 1 \Rightarrow 4^x = 1 \,/\log_4 \Rightarrow x = \log_4 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$\qquad t_2 = 4 \Rightarrow 4^x = 4 \,/\log_4 \Rightarrow x = \log_4 4 \Rightarrow x_2 = 1$

Skup rješenja glasi $\{0, 1\}$.

4. (i) Graf funkcije $f(x)=(x-1)^3+2$ dobiva se translacijom grafa $g(x)=x^3$ za 1 udesno duž x-osi i za 2 prema gore duž y-osi:

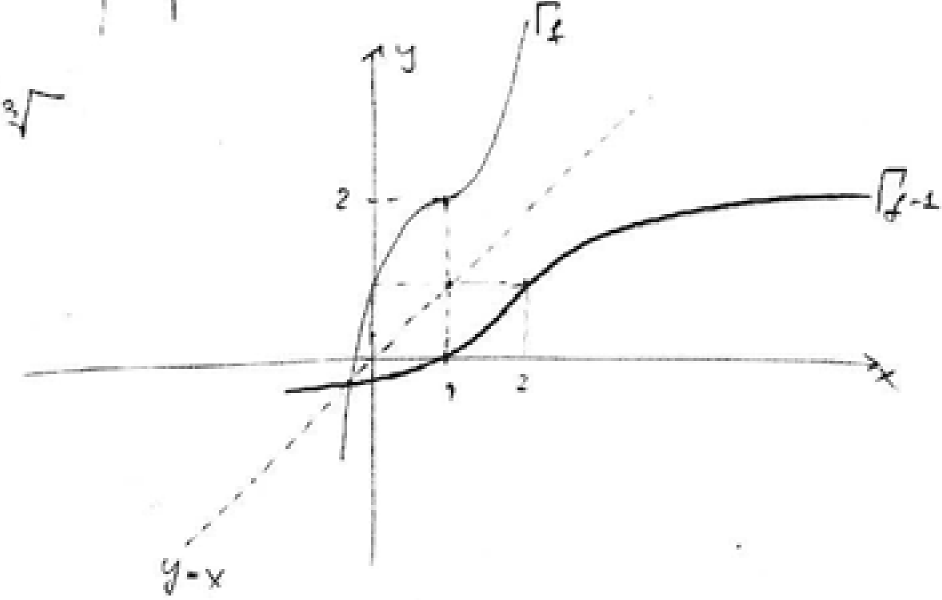


(ii) $x=(f^{-1}(x)-1)^3+2$

$x-2=(f^{-1}(x)-1)^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$

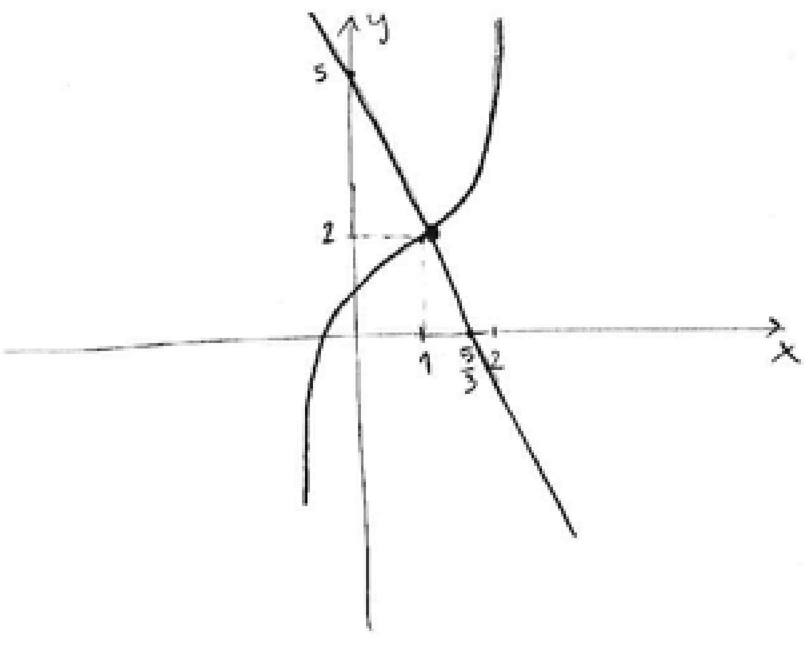
$f^{-1}(x)-1=\sqrt[3]{x-2}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}+1$



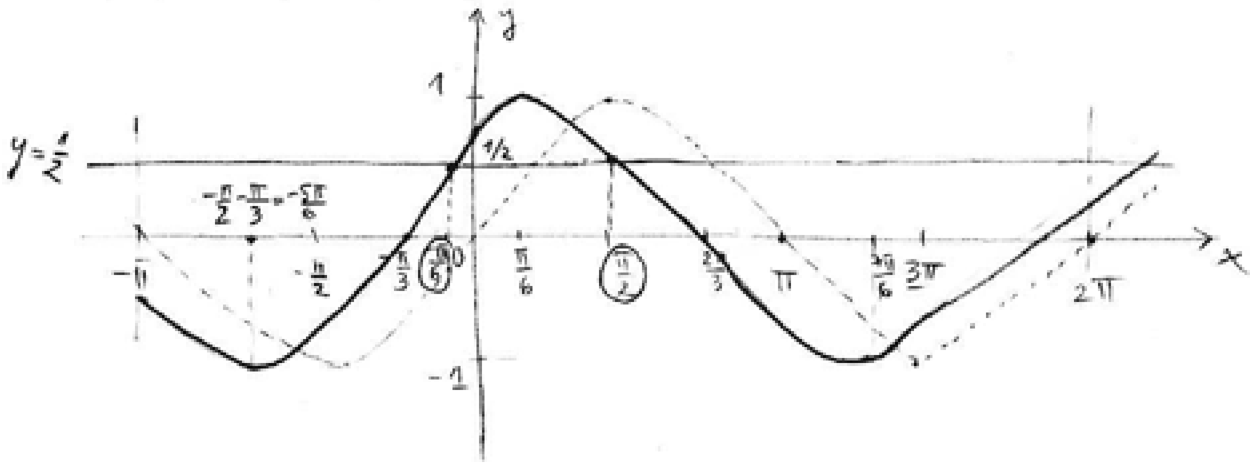
(iii)

Grafički rješenje jednadžbe $(x-1)^3+2=-3x+5$ tražimo kao presjeka grafova funkcija s lijeve i desne strane jednadžbe:



Vidimo sa slike da ove dvije krivulje imaju samo jednu točku presjeka; to znači da i jednadžba ima samo jedno rješenje.

(i) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ – graf ove funkcije dobivamo translacijom grafa funkcije $g(x)=\sin x$ za $\frac{\pi}{3}$ ulijevo:



⇒ Ako su kod $\sin x$ funkcije bili sljedeći intervali rasta i pada:

rast: $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$

pad: $\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\rangle, \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$,

kod $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ imamo: rast: $\langle -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\rangle = \underline{\langle -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle}$

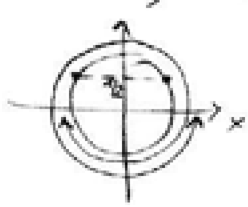
$\langle \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, 2\pi\rangle = \underline{\langle \frac{7\pi}{6}, 2\pi\rangle}$

pad: $\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\rangle = \underline{\langle -\pi, -\frac{5\pi}{6}\rangle}$

$\langle \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\rangle = \underline{\langle \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\rangle}$

Odmah slijedi da se lokalni maksimum postiže u $x_1=\frac{\pi}{6}$ i iznosi $y_1=1$, a lokalni minimumi u $x_2=-\frac{5\pi}{6}$ i $x_3=\frac{7\pi}{6}$ i iznose $y_2=y_3=-1$.

(ii) $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Rightarrow \quad x+\frac{\pi}{3}\in\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$



$\underline{x_1=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}}$

$\underline{x_2=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}}$

(iii) Vidi pravac $y=\frac{1}{2}$ u koordinatnom sustavu gore i točke presjeka tog pravca i grafa funkcije $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$.